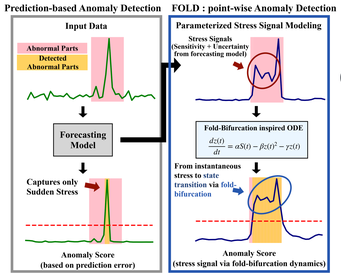
Point-wise Anomaly Detection via Fold-bifurcation ODE

Sheo Yon Jhin (sheoyon.jhin@kaist.ac.kr), Noseong Park (noseong@kaist.ac.kr)
KAIST

Paper Homepage

Motivation

Why do existing methods fail at point-wise anomaly detection?



Conventional methods detect only instantaneous errors, while real anomalies emerge from accumulated stress over time.

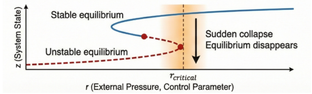
Anomalies are not instantaneous events —
they are the result of accumulated stress leading to a critical transition.

Fold-bifurcation

Canonical Form

$$\frac{dz(t)}{dt} = r - z(t)^2$$

z(t): system state, r : external pressure



Gradual change → Sudden transition (tipping point)

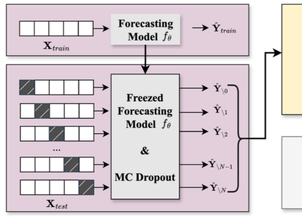
Key Property

When r exceeds a critical value, the stable equilibrium vanishes a sudden transition.

Intuition

- **A system can remain stable under gradual external pressure.**
- **As pressure increases, stable and unstable equilibria approach each other.**
- **At a critical threshold, the equilibrium disappears.**
- **The system suddenly collapses.**

Proposed Method



Parameterized Stress Signal Modeling

$$\epsilon_i = \underbrace{\delta \cdot D(\hat{Y}_{\setminus i}, \hat{Y})}_{\text{sensitivity term}} + \underbrace{\lambda \cdot |Var(\hat{Y}_{\setminus i}) - Var(\hat{Y})|}_{\text{uncertainty term}}$$

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{|\mathcal{I}(t)|} \sum_{i \in \mathcal{I}(t)} \epsilon_i, \quad t = 1, \ldots, L$$

Fold-Bifurcation inspired ODE

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \alpha \mathbf{S}(t) - \beta \mathbf{z}(t)^2 - \gamma \mathbf{z}(t)$$

Step 1 Stress Signal Extraction from Forecasting Model

- Train a forecasting model on normal sequences
- Perturb input by masking local patches
- Measure prediction sensitivity: $D(\hat{Y}_i, \hat{Y})$
- Quantify uncertainty via MC dropout: $|Var(\hat{Y}_i) - Var(\hat{Y})|$

-> Stress signal reflects local instability of the system

Step 2 Construct Time-varying Stress Signal

- Combine sensitivity and uncertainty into stress.

$$\epsilon_i = \delta D(\hat{Y}_i, \hat{Y}) + \lambda |Var(\hat{Y}_i) - Var(\hat{Y})|$$

- Aggregation : $S(t) = \frac{1}{|\mathcal{I}(t)|} \sum \epsilon_i$

-> Converts local instability into a temporal stress process

Step 3 From Stress to State Transition

$$\frac{dz(t)}{dt} = \alpha S(t) - \beta z(t)^2 - \gamma z(t)$$

- **S(t) drives system instability**
- **z(t) accumulates risk**

- α : how strongly stress drives the system
- β : nonlinear amplification of accumulated risk
- γ : resilience that pulls the system back to stability

-> Detect anomaly as a tipping-point transition

Experiments

Method	CATSv2	CreditCard	Daphnet	Exathlon	GECCO	GHL	Genesis	LTDB	MITDB	MSL	OPPORTUNITY	PSM	SMAP	SMD	SVDB	SWaT	TAO	Avg. RANK
FOLD (ours)	**0.23**	**0.19**	**0.39**	*0.93*	0.08	**0.07**	*0.38*	0.37	0.09	**0.50**	**0.82**	0.19	**0.45**	**0.46**	*0.39*	0.50	0.97	**3.11**
TSPulse (FT)	0.07	0.00	*0.35*	0.91	**0.18**	0.01	0.02	**0.57**	**0.14**	0.21	0.07	0.14	0.32	*0.36*	**0.47**	0.14	0.93	9.88
TSPulse (ZS)	0.05	0.00	*0.35*	0.89	*0.17*	0.01	0.01	0.36	0.07	0.20	0.07	0.14	0.30	0.35	0.38	0.13	0.93	12.17
CNN	0.08	0.02	0.21	0.68	0.03	0.02	0.10	0.33	**0.14**	0.35	0.16	0.22	0.19	0.35	0.19	0.41	**1.00**	*7.52*
OmniAnomaly	0.04	0.02	0.34	0.84	0.02	**0.07**	0.00	*0.44*	0.11	0.22	0.18	0.16	0.12	0.17	0.35	0.15	0.81	11.17
PCA	0.12	*0.10*	0.13	**0.95**	0.20	0.01	0.02	0.24	0.07	0.15	*0.30*	0.16	0.09	*0.36*	0.11	0.45	**1.00**	9.41
LSTMAD	0.04	0.02	0.31	0.82	0.02	*0.06*	0.04	0.30	0.09	0.22	0.17	0.24	0.16	0.33	0.15	0.16	*0.99*	9.41
USAD	0.04	0.02	0.34	0.84	0.02	*0.06*	0.00	0.41	*0.12*	0.23	0.18	0.19	0.11	0.16	0.32	0.15	0.81	11
AutoEncoder	0.06	0.03	0.13	0.91	0.05	0.05	0.01	0.21	0.04	0.22	0.14	**0.28**	0.13	0.30	0.06	**0.58**	**1.00**	10.17
KMeansAD	0.12	0.02	0.30	0.37	0.06	0.03	**0.89**	0.41	0.06	*0.44*	0.06	0.21	*0.38*	*0.36*	0.20	0.16	0.86	8.58
CBLOF	0.06	0.03	0.10	0.86	0.03	0.02	0.02	0.20	0.04	0.21	0.14	0.19	0.14	0.22	0.07	0.29	**1.00**	13.11
MCD	*0.13*	0.06	0.14	0.80	0.03	0.01	0.06	0.21	0.04	0.23	0.17	*0.26*	0.10	0.26	0.07	**0.54**	**1.00**	10.11
OCSVM	0.08	0.02	0.06	0.83	0.04	0.04	0.08	0.20	0.04	0.22	0.12	0.19	0.12	0.28	0.06	0.44	0.81	12.64
Donut	0.07	0.02	0.17	0.66	0.03	0.05	0.18	0.26	*0.12*	0.30	0.15	0.20	0.18	0.19	0.11	0.44	0.75	10.23
RobustPCA	0.04	0.02	0.06	0.77	0.02	0.03	0.00	0.23	0.04	0.22	0.13	0.12	0.07	0.10	0.08	0.12	**1.00**	17.17
FITS	*0.13*	0.02	0.33	0.63	0.03	0.01	0.10	0.23	0.05	0.17	0.05	0.13	0.08	0.17	0.10	0.15	0.78	15.41
OFA	*0.13*	0.02	0.31	0.58	0.04	0.01	0.22	0.29	0.06	0.14	0.05	0.17	0.08	0.17	0.12	0.12	0.78	14.52
EIF	0.06	0.02	0.15	0.41	0.04	0.02	0.06	0.19	0.04	0.18	0.10	0.18	0.13	0.32	0.07	0.32	0.89	14
COPOD	0.05	0.05	0.11	0.40	0.04	0.03	0.08	0.21	0.04	0.21	0.17	0.20	0.10	0.19	0.07	0.31	*0.99*	12.52
IForest	0.05	0.03	0.13	0.35	0.04	0.05	0.08	0.21	0.04	0.21	0.18	0.19	0.09	0.26	0.07	0.39	0.93	53.52
HBOS	0.05	0.04	0.15	0.32	0.04	0.04	0.08	0.21	0.04	0.23	0.17	0.17	0.09	0.25	0.07	0.30	0.83	12.88
TimesNet	0.07	0.02	0.27	0.42	0.03	0.01	0.02	0.27	0.07	0.17	0.06	0.14	0.09	0.14	0.11	0.14	0.79	15.88
KNN	0.07	0.02	0.25	0.33	0.11	0.01	0.04	0.19	0.04	0.18	0.06	0.12	0.12	0.30	0.06	0.11	0.78	16.82
TranAD	0.04	0.02	0.31	0.10	0.02	*0.06*	0.04	0.26	0.07	0.24	0.16	0.23	0.09	0.30	0.12	0.15	0.81	12.05
LOF	0.05	0.02	0.11	0.16	0.13	0.01	0.08	0.19	0.04	0.14	0.10	0.15	0.09	0.16	0.06	0.15	0.79	17.52
AnomalyTransformer	0.03	0.02	0.07	0.10	0.02	0.03	0.01	0.21	0.05	0.12	0.07	0.21	0.06	0.07	0.08	0.18	0.77	19

VUS-PR score, on TSB-AD (multivariate)

Method	CATSv2	CreditCard	Daphnet	Exathlon	GECCO	GHL	Genesis	LTDB	MITDB	MSL	OPPORTUNITY	PSM	SMAP	SMD	SVDB	SWaT	TAO	Avg. RANK
FOLD (ours)	**0.23**	**0.19**	**0.39**	*0.93*	0.08	**0.07**	*0.38*	0.37	0.09	**0.50**	**0.82**	0.19	**0.45**	**0.46**	*0.39*	0.50	0.97	**3.11**
TSPulse (FT)	0.07	0.00	*0.35*	0.91	**0.18**	0.01	0.02	**0.57**	**0.14**	0.21	0.07	0.14	0.32	*0.36*	**0.47**	0.14	0.93	9.88
TSPulse (ZS)	0.05	0.00	*0.35*	0.89	*0.17*	0.01	0.01	0.36	0.07	0.20	0.07	0.14	0.30	0.35	0.38	0.13	0.93	12.17
CNN	0.08	0.02	0.21	0.68	0.03	0.02	0.10	0.33	**0.14**	0.35	0.16	0.22	0.19	0.35	0.19	0.41	**1.00**	*7.52*
OmniAnomaly	0.04	0.02	0.34	0.84	0.02	**0.07**	0.00	*0.44*	0.11	0.22	0.18	0.16	0.12	0.17	0.35	0.15	0.81	11.17
PCA	0.12	*0.10*	0.13	**0.95**	0.20	0.01	0.02	0.24	0.07	0.15	*0.30*	0.16	0.09	*0.36*	0.11	0.45	**1.00**	9.41
LSTMAD	0.04	0.02	0.31	0.82	0.02	*0.06*	0.04	0.30	0.09	0.22	0.17	0.24	0.16	0.33	0.15	0.16	*0.99*	9.41
USAD	0.04	0.02	0.34	0.84	0.02	*0.06*	0.00	0.41	*0.12*	0.23	0.18	0.19	0.11	0.16	0.32	0.15	0.81	11
AutoEncoder	0.06	0.03	0.13	0.91	0.05	0.05	0.01	0.21	0.04	0.22	0.14	**0.28**	0.13	0.30	0.06	**0.58**	**1.00**	10.17
KMeansAD	0.12	0.02	0.30	0.37	0.06	0.03	**0.89**	0.41	0.06	*0.44*	0.06	0.21	*0.38*	*0.36*	0.20	0.16	0.86	8.58
CBLOF	0.06	0.03	0.10	0.86	0.03	0.02	0.02	0.20	0.04	0.21	0.14	0.19	0.14	0.22	0.07	0.29	**1.00**	13.11
MCD	*0.13*	0.06	0.14	0.80	0.03	0.01	0.06	0.21	0.04	0.23	0.17	*0.26*	0.10	0.26	0.07	**0.54**	**1.00**	10.11
OCSVM	0.08	0.02	0.06	0.83	0.04	0.04	0.08	0.20	0.04	0.22	0.12	0.19	0.12	0.28	0.06	0.44	0.81	12.64
Donut	0.07	0.02	0.17	0.66	0.03	0.05	0.18	0.26	*0.12*	0.30	0.15	0.20	0.18	0.19	0.11	0.44	0.75	10.23
RobustPCA	0.04	0.02	0.06	0.77	0.02	0.03	0.00	0.23	0.04	0.22	0.13	0.12	0.07	0.10	0.08	0.12	**1.00**	17.17
FITS	*0.13*	0.02	0.33	0.63	0.03	0.01	0.10	0.23	0.05	0.17	0.05	0.13	0.08	0.17	0.10	0.15	0.78	15.41
OFA	*0.13*	0.02	0.31	0.58	0.04	0.01	0.22	0.29	0.06	0.14	0.05	0.17	0.08	0.17	0.12	0.12	0.78	14.52
EIF	0.06	0.02	0.15	0.41	0.04	0.02	0.06	0.19	0.04	0.18	0.10	0.18	0.13	0.32	0.07	0.32	0.89	14
COPOD	0.05	0.05	0.11	0.40	0.04	0.03	0.08	0.21	0.04	0.21	0.17	0.20	0.10	0.19	0.07	0.31	*0.99*	12.52
IForest	0.05	0.03	0.13	0.35	0.04	0.05	0.08	0.21	0.04	0.21	0.18	0.19	0.09	0.26	0.07	0.39	0.93	53.52
HBOS	0.05	0.04	0.15	0.32	0.04	0.04	0.08	0.21	0.04	0.23	0.17	0.17	0.09	0.25	0.07	0.30	0.83	12.88
TimesNet	0.07	0.02	0.27	0.42	0.03	0.01	0.02	0.27	0.07	0.17	0.06	0.14	0.09	0.14	0.11	0.14	0.79	15.88
KNN	0.07	0.02	0.25	0.33	0.11	0.01	0.04	0.19	0.04	0.18	0.06	0.12	0.12	0.30	0.06	0.11	0.78	16.82
TranAD	0.04	0.02	0.31	0.10	0.02	*0.06*	0.04	0.26	0.07	0.24	0.16	0.23	0.09	0.30	0.12	0.15	0.81	12.05
LOF	0.05	0.02	0.11	0.16	0.13	0.01	0.08	0.19	0.04	0.14	0.10	0.15	0.09	0.16	0.06	0.15	0.79	17.52
AnomalyTransformer	0.03	0.02	0.07	0.10	0.02	0.03	0.01	0.21	0.05	0.12	0.07	0.21	0.06	0.07	0.08	0.18	0.77	19

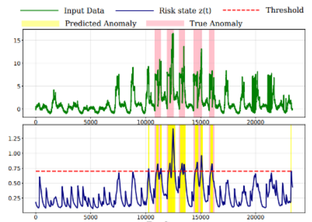
VUS-PR score, on TSB-AD (univariate)

Method	NAB			UCR			SMAP		
	P	R	F1	P	R	F1	P	R	F1
NRdetector	0.0502	0.0581	0.1032	0.6361	0.0542	0.0908	0.6372	0.1608	0.2367
FOLD (*w/o Uncertainty*)	0.2083	0.0781	0.1136	0.3417	0.4116	*0.1761*	0.1879	0.0942	0.0655
FOLD (*w/o Sensitivity*)	0.1939	0.5937	*0.2187*	0.0394	0.3502	0.0599	0.3491	0.3532	*0.2959*
FOLD (Full Model)	0.3519	0.6875	**0.4245**	0.4267	0.4058	**0.2542**	0.6820	0.7059	**0.6013**

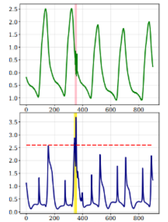
Ablation study on stress signal components

ε (%)	Z_{thr}	ΔZ (%)	F1	ΔF1 (pp)
0	0.5982	—	0.8095	—
3	0.6105	+2.05	0.7918	-2.19
5	0.7075	+18.3	0.5366	-33.7
10	0.7204	+20.4	0.3832	-52.6

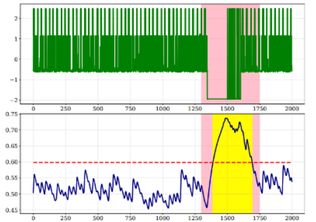
Effect of calibration contamination on threshold stability



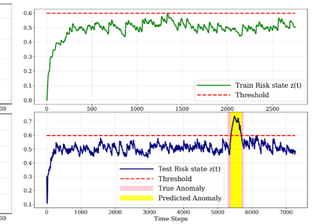
SMD



UCR



SMAP



SMAP (threshold)